Introduction à la théorie des catégories

Garance Henrion
sous la direction de Sébastien Martineau

M1 Mathématiques et Applications de Sorbonne Université

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce TER est de se familiariser avec les objets sur lesquels se base la théorie des catégories : catégorie, foncteur, transformation naturelle, isomorphisme, adjoint. Dans cette optique, ce mémoire est composé comme un livret d'exercices qui invitera le.a lecteur.trice à s'approprier chaque notion nouvelle. Le but est de les repérer dans les mathématiques qu'un.e élève de Licence aura rencontrées.
La source utilisée lors de ce TER est l'Applied Category Theory Course de John Baez, dont je reprends les notations et le vocabulaire.
Je tiens à remercier mon encadrant Sébastien Martineau pour sa pédagogie et la qualité de son accompagnement. Merci aussi à David García-Zelada qui s'est joint à nombre de nos séances. Son point de vue et ses connaissances m'ont été très utiles. Enfin, merci à Guillaume Garnier pour m'avoir partagé ses compétences en LaTeX.

1 Catégories

Durant sa formation, une mathématicienne est amenée à travailler sans le savoir avec des objets et des morphismes qui forment une structure que l'on appelle une catégorie.

1.1 Définition

Définition 1. Une **catégorie** $\mathscr{C}$ est la donnée de :

1. une collection d'**objets** $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
2. pour chaque paire d'objets (A, B), un ensemble $\mathscr{C}(A, B)$. Les éléments de cet ensemble sont appelés **morphismes** de A dans B. Si f est un morphisme de A dans B, on écrit $f : A \to B$.

De plus :

— pour $f : A \to B$ et $g : B \to C$ des morphismes, on se donne un morphisme $g \circ f : A \to C$ appelé la **composition** de f par g ;

— pour tout objet A, on se donne un morphisme id_A appelé **identité** de A.

Ces morphismes doivent respecter les lois suivantes :

— la composition est **associative** :
pour tous morphismes $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

— les identités sont des **éléments neutres de la composition** :
pour tout morphisme $f : A \to B$, $\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A$.

1.2 Exercices

Commençons par regarder des catégories de taille "minimale".

Exercice 1 (Sur l'interprétation de certaines catégories comme des monoïdes)**.** *Montrer qu'une catégorie à un seul objet définit un monoïde.*

Corrigé

Point de compréhension
Un monoïde $(M, *, e)$ est un ensemble M muni d'une loi de composition interne associative $*$ et d'un élément neutre e.

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie telle que $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \{A\}$. Alors on peut définir $(M, *, e)$ un monoïde par :

— $M = \mathscr{C}(A, A)$;

— on définit $*$ comme étant la composition de morphismes de A dans A ;

— $e = \mathrm{id}_A$.

Vérifions que cela définit bien un monoïde :

- l'associativité de la composition donne celle de $*$;
- comme id_A est neutre pour la composition, e est bien l'élément neutre de $*$.

Exercice 2 (Sur l'interprétation des monoïdes comme des catégories)**.** *Montrer qu'un monoïde définit une catégorie.*

Corrigé

Soit $(M, *, e)$ un monoïde. On définit une catégorie $\mathscr{C}$ par :

1. un seul objet A ;
2. $\mathscr{C}(A, A) = M$.

Définissons la composition et l'identité :

- pour $x, y \in M$, $x * y \in M$. On pose donc $x \circ y = x * y$;
- on pose $\mathrm{id}_A = e$.

Vérifions que les lois sont respectées :

- l'associativité de $*$ donne celle de la composition ;
- par définition de l'élément neutre pour $*$, e est élément neutre à droite et à gauche pour la composition.

Exercice 3 (Sur l'interprétation des préordres comme des catégories)**.** *Montrer qu'un préordre définit une catégorie.*

Corrigé

Point de compréhension

Un préordre $(X, \leq)$ est la donnée d'un ensemble X muni d'une relation binaire réflexive et transitive $\leq$.

Soit $(X, \leq)$ un préordre. On définit une catégorie $\mathscr{C}$ par :

1. $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = X$.
2. Pour $x, y \in X$: il y a exactement un morphisme de x dans y si $x \leq y$ et aucun sinon.

Définissons la composition et l'identité :

- pour $f : x \to y$ et $g : y \to z$, on a que $x \leq y$ et $y \leq z$. Par transitivité, $x \leq z$. Donc il existe un unique morphisme $h : x \to z$. On n'a d'autre choix que de poser $g \circ f = h$;
- pour $x \in X$, la réflexivité implique $x \leq x$, ce qui donne l'existence d'un unique morphisme $f : x \to x$. On n'a d'autre choix que de poser $\mathrm{id}_x = f$.

Vérifions que les lois sont respectées :

- pour tous morphismes $f : s \to t$, $g : t \to u$, $h : u \to v$, $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont deux morphismes de s dans v. Par unicité, ils sont égaux ;

— pour tout morphisme $f : x \to y$, $\mathrm{id}_B \circ f$ et $f \circ \mathrm{id}_A$ sont deux morphismes de x dans y. Par unicité, ils sont égaux à f.

Exercice 4 (Obtenir un préordre à partir d'une catégorie)**.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Définir un préordre dont les éléments sont les objets de $\mathscr{C}$.*

Corrigé

Pour $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on pose : $x \leq y \iff \mathscr{C}(x, y) \neq \varnothing$. Vérifions que les propriétés de la relation sont respectées :

— réflexivité : $\mathrm{id}_x \in \mathscr{C}(x, x)$ donc $x \leq x$;

— transitivité : si on a $x \leq y$ et $y \leq z$, alors on peut se donner $f : x \to y$ et $g : y \to z$. On a alors $g \circ f \in \mathscr{C}(x, z)$. Donc $x \leq z$.

Remarque 1. On remarque une correspondance entre les préordres et les catégories où entre deux objets quelconque, il y a au plus un morphisme.

Exercice 5 (Minimalité du nombre de morphismes)**.** *Donner une catégorie avec le moins de morphismes possible qui n'est pas un préordre.*

Corrigé

Point de compréhension

D'après ce qu'on a vu précédemment, il faut au moins deux morphismes (s'il n'y en a qu'un, on obtient un préordre). On cherche donc à construire une catégorie avec exactement 2 morphismes.

On définit une catégorie $\mathscr{C}$ par :

1. $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \{a\}$
2. $\mathscr{C}(a, a) = \{\mathrm{id}_a, f : a \to a\}$ où $f \circ f = f$.

Intéressons-nous à d'autres exemples :

Exercice 6 (La catégorie des ensembles)**.** *Montrer que l'on peut définir une catégorie telle que :*

1. *les objets sont les ensembles ;*
2. *les morphismes sont les fonctions entre deux ensembles ;*

On appellera cette catégorie Set.

Corrigé

Définissons la composition et l'identité :

— pour tous morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$, la composition de morphismes est définie par la composition de fonctions usuelle : pour tout $x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$;

— pour tout ensemble A, le morphisme identité est défini par la fonction identité usuelle : pour $x \in A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$.

Les lois sont vérifiées par propriétés usuelles de la composition de fonctions et de la fonction identité.

Définition 2 (Relation)**.** Pour X, Y des ensembles, une **relation** de X dans Y est une partie de $X \times Y$. Si R est une relation de X dans Y, on écrit $R : X \nrightarrow Y$.
De plus :

— $R : X \nrightarrow Y$ est dite **déterministe** si : pour tout $x \in X$, il existe au plus un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R$;

— $R : X \nrightarrow Y$ est dite **totale** si, pour tout $x \in X$, il existe au moins un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R$.

Remarque 2. On pense une relation comme une fonction pouvant avoir aucune ou plusieurs images pour chaque élément de l'ensemble de départ.

Exercice 7 (La catégorie des relations)**.** *Montrer que l'on définit bien une catégorie par :*

1. *les objets sont les ensembles ;*
2. *un morphisme* $R : X \nrightarrow Y$ *est une relation de* X *dans* Y *;*
3. *pour* $R : X \nrightarrow Y$ *et* $S : Y \nrightarrow Z$*, la composition* $S \circ R : X \nrightarrow Z$ *est définie par :* $S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y \mid (x, y) \in R \text{ et } (y, z) \in S\}$.
4. *l'identité* $\mathrm{id}_X : X \nrightarrow X$ *est définie par :* $\mathrm{id}_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

On appellera cette catégorie Rel.

Remarque 3. Lorsque l'on compose deux relations, un couple d'éléments est dans la composée si l'on a un "chemin" reliant X et Z passant par Y.

Corrigé

Vérifions que les lois sont respectées :

— soient $R : A \nrightarrow B, S : B \nrightarrow C, T : C \nrightarrow D$ des relations.
D'une part : $T \circ (S \circ R) = \{(a, d) \in A \times D : \exists c \in C \mid (a, c) \in S \circ R$ et $(c, d) \in T\}$.
D'autre part : $(T \circ S) \circ R = \{(a, d) \in A \times D : \exists b \in B \mid (a, b) \in R$ et $(b, d) \in T \circ S\}$.
Montrons par double inclusion $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
Soit $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$: $\exists c \in C \mid (a, c) \in S \circ R$ et $(c, d) \in T$. Soit un tel c. Alors : $(a, c) \in S \circ R \implies \exists b \in B \mid (a, b) \in R, (b, c) \in S$. Soit un tel b. On a donc : $(a, b) \in R, (b, c) \in S, (c, d) \in T$. En particulier, cela implique $(b, d) \in T \circ S$. D'où : $\exists b \in B \mid (a, b) \in R$ et $(b, d) \in T \circ S$. Ce qui permet de conclure : $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$, ce qui donne $T \circ (S \circ R) \subset (T \circ S) \circ R$.
L'inclusion réciproque est analogue.

— Soit $R : X \nrightarrow Y$:
$R \circ \mathrm{id}_X = \{(x, y) \in X \times Y : (x, y) \in R$ et $(x, x) \in \mathrm{id}_X\} = R$;
$\mathrm{id}_Y \circ R = \{(x, y) \in X \times Y : (x, y) \in R$ et $(y, y) \in \mathrm{id}_Y\} = R$.

Exercice 8 (Catégorie libre sur un graphe)**.** *Soit* G *un graphe orienté. La* ***catégorie libre*** *sur* G*, notée* $\mathrm{Free}(G)$*, est définie par :*

1. *Les objets de* $\mathrm{Free}(G)$ *sont les sommets ;*

2. Les morphismes de Free(G) *sont les chemins.*

Vérifier qu'il s'agit bien d'une catégorie.

Corrigé

Définissons la composition et l'identité :

— pour tous morphismes $f : u \to v$ et $g : v \to w$, la composition de morphismes est le chemin défini par la concaténation des chemins f et g ;

— pour tout sommet u, le morphisme identité est défini comme le chemin de longueur zéro, *i.e* le chemin à zéro arête reliant un sommet à lui-même.

Ces définitions vérifient bien les lois.

Remarque 4. Autres exemples de catégories :

— Vect : les objets sont les espaces vectoriels, les morphismes les morphismes d'espaces vectoriels ;

— Top : les objets sont les espaces topologiques, les morphismes les fonctions continues ;

— Anneaux : les objets sont les anneaux, les morphismes les morphismes d'anneaux.

2 Foncteurs

Nous allons maintenant établir une notion de fonction entre catégories, appelée foncteur. En réalité, il va s'agir de la donnée de plusieurs fonctions, une qui envoie les objets, l'autre les morphismes, de la catégorie de départ sur les objets, respectivement les morphismes, de la catégorie d'arrivée. Mais on utilisera le même nom pour évoquer le foncteur, la fonction qui décrit ce que le foncteur fait aux objets et la fonction qui décrit ce que le foncteur fait aux morphismes !

2.1 Définition

Définition 3 (Foncteur)**.** Soient $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ deux catégories. Un **foncteur** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est la donnée de :

1. une fonction de $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ dans $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, aussi notée F ;
2. Pour tous $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, une fonction de $\mathscr{C}(x, y)$ dans $\mathscr{D}(F(x), F(y))$, aussi notée F.

F doit respecter les lois suivantes :

— F préserve la composition : pour tous morphismes $f : x \to y, g : y \to z$ de $\mathscr{C}$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

— F préserve les identités : $F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)}$.

2.2 Exercices

Exercice 9 (La composée de deux foncteurs est encore un foncteur)**.** *Soient $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ et $B : \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ deux foncteurs. Montrer que l'on définit un foncteur $B \circ A : \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$ par :*

— $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{X}), (B \circ A)(x) = B(A(x))$ *;*

— *pour tout morphisme $f : x \to x'$ de $\mathscr{X}$, on a : $(B \circ A)(f) = B(A(f))$.*

Corrigé

Vérifions les lois :

— soient $f : x \to x'$ et $g : x' \to x''$ des morphismes de $\mathscr{X}$. Alors :

$$\begin{aligned}(B \circ A)(g \circ f) &= B(A(g \circ f)) \\ &= B(A(g) \circ A(f)) \text{ car A est un foncteur} \\ &= B(A(g)) \circ B(A(f)) \text{ car B est un foncteur} \\ &= (B \circ A)(g) \circ (B \circ A)(f);\end{aligned}$$

— soit x un objet de $\mathscr{X}$. Alors :

$$\begin{aligned}(B \circ A)(\mathrm{id}_x) &= B(A(\mathrm{id}_X)) \\ &= B(\mathrm{id}_{A(x)}) \text{ car A est un foncteur} \\ &= \mathrm{id}_{B(A(x))} \text{ car B est un foncteur} \\ &= \mathrm{id}_{(B\circ A)(x)}.\end{aligned}$$

Exercice 10 (Foncteur identité)**.** *Pour toute catégorie $\mathscr{X}$, montrer que l'on définit un foncteur* $\mathrm{id}_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ *par :*

1. *pour tout objet x de $\mathscr{X}$, on a $\mathrm{id}_{\mathscr{X}}(x) = x$;*
2. *pour tout morphisme $f : x \to x'$ de $\mathscr{X}$, on a $\mathrm{id}_{\mathscr{X}}(f) = f$.*

Corrigé

Vérifions les lois :

— soient $f : x \to x'$ et $g : x' \to x''$ des morphismes de $\mathscr{X}$. Alors : $\mathrm{id}_{\mathscr{X}}(g \circ f) = g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{X}}(g) \circ \mathrm{id}_{\mathscr{X}}(f)$;

— soit x un objet de $\mathscr{X}$. Alors : $\mathrm{id}_{\mathscr{X}}(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_x = \mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathscr{X}}(x)}$.

Exercice 11 (La catégorie des catégories)**.** *Montrer que l'on définit une catégorie $\mathscr{C}$ par :*

1. *les objets sont les catégories ;*
2. *un morphisme $F : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un foncteur de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{Y}$;*
3. *la composition est définie comme dans l'exercice 9 ;*
4. *les identités sont définies comme dans l'exercice 10.*

Corrigé

Vérifions que les lois sont respectées :

— soient $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ et $H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ des foncteurs. Pour $x \in \mathscr{A}$,

$$((H \circ G) \circ F)(x) = (H \circ G)(F(x)) = H(G(F(x))) = H((G \circ F)(x)) = (H \circ (G \circ F))(x).$$

Pour f un morphisme de $\mathscr{A}$, le calcul qui donne $((H \circ G) \circ F)(f) = (H \circ (G \circ F))(f)$ est identique. On conclut donc que $((H \circ G) \circ F) = (H \circ (G \circ F))$;

— soit $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.
Pour x objet de A, $F \circ \mathrm{id}_{\mathscr{A}}(x) = F(x)$ et $\mathrm{id}_{\mathscr{B}} \circ F(x) = F(x)$.
Pour f morphisme de A, $F \circ \mathrm{id}_{\mathscr{A}}(f) = F(f)$ et $\mathrm{id}_{\mathscr{B}} \circ F(f) = F(f)$.

Exercice 12 (Sur l'injection d'une catégorie dans une autre)**.** *Montrer que l'injection canonique* $i : \mathrm{Set} \to \mathrm{Rel}$ *définit un foncteur.*

Corrigé

Vérifions les lois :

— Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$.
D'une part, $i(g \circ f) = \{(x, g(f(x))), x \in X\}$;
D'autre part, $i(g) \circ i(f) = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y \mid (x, y) \in i(f) \text{ et } (y, z) \in i(g)\}$.
Montrons par double inclusion que : $i(g \circ f) = i(g) \circ i(f)$.
Soit $(x, z) \in i(g \circ f)$. Alors : $z = g(f(x))$. Or $(x, f(x)) \in i(f)$ et $(f(x), g(f(x))) \in i(g)$, donc $(x, g(f(x))) \in i(g) \circ i(f)$, ce qui permet de conclure que $i(g \circ f) \subset i(g) \circ i(f)$.
Soit $(x, z) \in i(g) \circ i(f)$. Alors : $\exists y \in Y \mid (x, y) \in i(f)$ et $(y, z) \in i(g)$. Soit un tel y. En particulier, $y = f(x)$ et $z = g(y) = g(f(x))$. Ainsi, $(x, z) = (x, g(f(x))) \in i(g \circ f)$, ce qui permet de conclure que $i(g) \circ i(f) \subset i(g \circ f)$.

— Soit X un ensemble. Alors : $i\begin{pmatrix} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & x \end{pmatrix} = \{(x,x), x \in X\} = \mathrm{id}_X$.

Remarque 5. On pourrait introduire la notions de sous-catégorie et montrer que Set est une sous-catégorie de Rel.

Exercice 13 (Sur l'interprétation de l'ensemble des entiers naturels comme une catégorie)**.** *Soit $\mathbb{N}$ la catégorie libre sur le graphe $G = (\{z\}, \{s : z \to z\})$. Chaque entier naturel est représenté par un morphisme : 0 par le morphisme identité $\mathrm{id}_z = s^0$, 1 par $s = s^1$, 2 par $s \circ s = s^2$,…Quels sont les foncteurs $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Que se passe-t-il quand on les compose ?*

Corrigé

Les foncteurs sont de la forme suivante : pour $n \in \mathbb{N}, F_n : s \longmapsto s^n$.
Pour $n, m \in \mathbb{N}$, $F_n \circ F_m(s) = F_n(s^m) = s^{mn}$.

Remarque 6. On a donc une correspondance entre les foncteurs de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels. Dans ce cas, composer deux foncteurs revient à multiplier deux entiers naturels.

Remarque 7. Exemple de foncteur d'oubli (les foncteurs d'oubli envoient les objets d'une catégorie sur des objets d'une autre catégorie en "oubliant" certaines propriétés de ces objets) : $\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ (V,+,\cdot) & \longmapsto & V \end{array}\right.$.

Remarque 8. Exemple de foncteur contravariant (un foncteur contravariant F d'une catégorie $\mathscr{C}$ dans une catégorie $\mathscr{D}$ est un foncteur de la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, obtenue en inversant le sens des morphismes dans $\mathscr{C}$, dans $\mathscr{D}$) : $\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{Top} & \longrightarrow & \mathrm{Anneaux} \\ X & \longmapsto & \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \\ f : X \to Y & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Y,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \\ \phi & \longmapsto & \phi \circ f \end{array}\right. \end{array}\right.$.

3 Transformations naturelles

Maintenant que nous avons défini une notion de fonctions entre catégories avec les foncteurs, nous allons maintenant définir une notion de fonction entre foncteurs : les transformations naturelles. Pourquoi ? Si deux foncteurs établissent de nouvelles contructions, une transformation naturelle entre ces foncteurs permet de comparer ces constructions. Pour chaque objet, la transformation naturelle va donner un morphisme entre les images de cet objet par les deux foncteurs.

3.1 Définition

> **Définition 4** (Transformation naturelle)**.** Pour $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des catégories et $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ des foncteurs, une **transformation** $\alpha : F \Rightarrow G$ est la donnée d'un choix de morphisme $\alpha_x : F(x) \to G(x)$ pour tout $x \in \mathscr{C}$.
> On dit qu'une transformation est **naturelle** si : pour tout $f : x \to y$ morphisme de $\mathscr{C}$, $G(f)\alpha_x = \alpha_y F(f)$.

La dernière condition peut paraître un peu obscure, mais prendra du sens au fil des exercices.

3.2 Exercices

Exercice 14 (La composée de deux transformations naturelles est encore une transformation naturelle)**.** *Soient $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ des catégories, $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ des foncteurs et $\alpha : F \Rightarrow G, \beta : G \Rightarrow H$ des transformations naturelles. Montrer que la donnée de $(\beta \circ \alpha)_x = \beta_x \circ \alpha_x$ pour $x \in \mathscr{C}$ définit une transformation naturelle.*

Corrigé

Point de compréhension
On veut montrer que : pour tout $f : x \to y$ morphisme de $\mathscr{C}$, $H(f) \circ \beta_x \circ \alpha_x = \beta_y \circ \alpha_y \circ F(f)$.

Soit $f : x \to y$ un morphisme de $\mathscr{C}$.
Comme α est une transformation naturelle, $G(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f)$.
Comme β est une transformation naturelle : $H(f) \circ \beta_x = \beta_y \circ G(f)$.
Ceci entraîne donc : $H(f) \circ \beta_x \circ \alpha_x = \beta_y \circ G(f) \circ \alpha_x = \beta_y \circ \alpha_y \circ F(f)$.

Exercice 15 (Transformation naturelle identité)**.** *Pour tout foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, montrer que l'identité $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$ définie pour tout $x \in \mathscr{C}$ par $(\mathrm{id}_F)_x = \mathrm{id}_{F(x)}$ est une transformation naturelle.*

Corrigé

Point de compréhension

On veut montrer que : pour tout $f : x \to y$ morphisme de $\mathscr{C}$, $F(f) \circ (\mathrm{id}_F)_x = (\mathrm{id}_F)_y \circ F(f)$. Il faut garder à l'esprit que :

— F préserve la composition : pour tous morphismes $f : x \to y$, $g : y \to z$ de $\mathscr{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

— F préserve les identités : $F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)}$.

Soit $f : x \to y$ morphisme de $\mathscr{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
F(f) \circ (\mathrm{id}_F)_x &= F(f) \circ \mathrm{id}_{F(x)} && \text{par définition} \\
&= F(f) \circ F(\mathrm{id}_x) && \text{car F est un foncteur} \\
&= F(f \circ \mathrm{id}_x) && \text{car F est un foncteur} \\
&= F(f) && \text{par propriété de } \mathrm{id}_x \\
&= F(\mathrm{id}_y \circ f) && \text{par propriété de } \mathrm{id}_y \\
&= F(\mathrm{id}_y) \circ F(f) && \text{car F est un foncteur} \\
&= \mathrm{id}_{F(y)} \circ F(f) && \text{car F est un foncteur} \\
&= (\mathrm{id}_F)_y \circ F(f) && \text{par définition.}
\end{aligned}$$

Exercice 16 (La catégorie des foncteurs)**.** *Pour toutes catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, montrer que l'on définit une catégorie $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ par :*

1. *les objets sont les foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$;*
2. *les morphismes sont les transformations naturelles entre foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$;*
3. *la composition est définie dans l'exerice 14 ;*
4. *l'identité est définie dans l'exercice 15.*

Corrigé

Point de compréhension

Ici, il faut se rappeler que pour $\alpha : F \Rightarrow G$, pour $x \in \mathscr{C}$, $\alpha_x : F(x) \to G(x)$ est un morphisme de $\mathscr{D}$.

Vérifions que les lois sont respectées :

— soient $F, G, H, I : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ des foncteurs, soient $\alpha : F \Rightarrow G, \beta : G \Rightarrow H, \gamma : H \Rightarrow I$ des transformations naturelles. Pour $x \in \mathscr{C}$,

$$((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)_x = (\gamma \circ \beta)_x \circ \alpha_x = (\gamma_x \circ \beta_x) \circ \alpha_x = \gamma_x \circ (\beta_x \circ \alpha_x) = \gamma_x \circ (\beta \circ \alpha)_x = (\gamma \circ (\beta \circ \alpha))_x;$$

— soient $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ des foncteurs, soit $\alpha : F \Rightarrow G$ une transformation naturelle. Pour $x \in \mathscr{C}$,

$$(\mathrm{id}_G \circ \alpha)_x = (\mathrm{id}_G)_x \circ \alpha_x = \mathrm{id}_{G(x)} \circ \alpha_x = \alpha_x.$$

De même, $(\alpha \circ \mathrm{id}_F)_x = \alpha_x$.

4 Isomorphismes

4.1 Définition

Définition 5 (Isomorphisme)**.** Pour un morphisme $f : x \to y$ d'une catégorie $\mathscr{C}$, un **inverse** de f est un morphisme $g : y \to x$ tel que :

— g est un **inverse à gauche** de f : $g \circ f = \mathrm{id}_x$;

— g est un **inverse à droite** de f : $f \circ g = \mathrm{id}_y$.

Un morphisme est un **isomorphisme** s'il a un inverse. Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont des catégories, alors un isomorphisme de $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ est appelé un **isomorphisme naturel**.
Deux objets x, y d'une catégorie $\mathscr{C}$ sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $f : x \to y$.

Remarque 9. Etre isomorphe est une relation d'équivalence.

4.2 Exercices

Exercice 17 (Sur l'unicité de l'inverse)**.**

1. *Montrer qu'un morphisme a au plus un inverse.*
2. *Donner un exemple de morphisme qui a plus d'un inverse à gauche.*
3. *Donner un exemple de morphisme qui a plus d'un inverse à droite.*

Corrigé

1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, $f : x \to y$ un morphisme de $\mathscr{C}$, et $g, h : y \to x$ des inverses de f. Alors :
$$g = \mathrm{id}_x \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ \mathrm{id}_y = h.$$
2. Plaçons-nous dans Set. Alors $f : x \in \mathbb{N} \mapsto 2x \in \mathbb{N}$ admet au moins deux inverses à gauche : $g : x \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ et $h : x \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$. En effet :
$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad g \circ f(x) = \left\lfloor \tfrac{2x}{2} \right\rfloor = x \quad \text{et} \quad h \circ f(x) = \left\lfloor \tfrac{2x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x + \tfrac{1}{2} \right\rfloor = x.$$
3. Plaçons-nous dans Set. Alors $f : x \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ a au moins deux inverses à droite : $g : x \in \mathbb{N} \mapsto 2x \in \mathbb{N}$ et $h : x \in \mathbb{N} \mapsto 2x + 1 \in \mathbb{N}$. En effet :
$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad f \circ g(x) = \left\lfloor \tfrac{2x}{2} \right\rfloor = x \quad \text{et} \quad f \circ h(x) = \left\lfloor \tfrac{2x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x + \tfrac{1}{2} \right\rfloor = x.$$

Exercice 18 (Morphismes d'un préordre)**.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Montrer que si $\mathscr{C}$ est un préordre et si $f : x \to y$ et $g : y \to x$ sont deux morphismes, alors g est l'inverse de f.*

Corrigé

Point de compréhension
On a vu qu'un préordre est une catégorie dans laquelle il y a au plus un morphisme entre deux objets.

On a $f \circ g \in \mathscr{C}(y, y)$. Or il y a au plus un morphisme de y dans lui-même, donc $f \circ g = \mathrm{id}_y$.
On a $g \circ f \in \mathscr{C}(x, x)$. Or il y a au plus un morphisme de x dans lui-même, donc $g \circ f = \mathrm{id}_x$.

Remarque 10. Si $\mathscr{C}$ est un préordre et si $f : x \to y$ et $g : y \to x$ sont deux morphismes, alors x et y sont isomorphes.

Exercice 19 (Morphismes d'un ensemble ordonné)**.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Montrer que si $\mathscr{C}$ est un ensemble ordonné et si $f : x \to y$ et $g : y \to x$ sont deux morphismes, alors f et g sont des morphismes identités.*

Corrigé

Point de compréhension
Un ensemble ordonné est un préordre dans lequel si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.

Comme $x = y$, $f, g \in \mathscr{C}(x, x)$. Or $\mathscr{C}(x, x) = \{\mathrm{id}_x\}$ donc $f = g = id_x$.

Exercice 20 (Les isomorphismes de la catégorie des ensembles)**.** *Montrer que les isomorphismes de* Set *sont les bijections.*

Corrigé

Point de compréhension
Il s'agit de se rappeler que pour tout ensemble A, le morphisme identité est défini par la fonction identité usuelle : pour $x \in A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$.

Montrons que chaque isomorphisme de Set est une bijection. Soit $f : X \to Y$ un isomorphisme de Set et $g : Y \to X$. Alors $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_X$, donc g est l'inverse au sens fonctionnel de f, d'où l'on conclut que f est une bijection. Montrons que chaque bijection est un isomorphisme de Set. Soit $f : X \to Y$ une bijection. Soit $g : Y \to X$ son inverse. Alors : $\forall x \in X, g \circ f(x) = x$ donc $g \circ f = \mathrm{id}_X$. De même, $f \circ g = id_Y$. Donc g est l'inverse de f au sens des morphismes.

Exercice 21 (Sur les isomophismes naturels)**.** *Soient $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ des foncteurs. Soit $\alpha : F \Rightarrow G$ une transformation naturelle. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme naturel si et seulement si pour chaque $x \in \mathscr{C}$, α_x est un isomorphisme de $\mathscr{C}$.*

Corrigé

Supposons que $\alpha : F \Rightarrow G$ est un isomorphisme naturel. Alors on a une transformation naturelle $\beta : G \to F$ telle que $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$ et $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$. Alors pour tout $x \in \mathscr{C}$, $\beta_x \circ \alpha_x = \mathrm{id}_{F(x)}$ et $\alpha_x \circ \beta_x = \mathrm{id}_{G(x)}$. Ainsi, pour chaque x dans $\mathscr{C}$, β_x est l'inverse de α_x. Réciproquement, supposons que pour chaque x de $\mathscr{C}$, α_x est un isomorphisme de $\mathscr{C}$. Alors, on a pour chaque x de $\mathscr{C}$ un unique morphisme β_x tel que $\beta_x \circ \alpha_x = \mathrm{id}_{F(x)}$ et $\alpha_x \circ \beta_x = \mathrm{id}_{G(x)}$. Posons β comme la donnée des β_x. Montrons que cette transformation est naturelle.

Point de compréhension

Il faut démontrer que : pour tout $f : x \to y$ morphisme de $\mathscr{C}$, $F(f) \circ \beta_x = \beta_y \circ G(f)$.

Soit $f : x \to y$ morphisme de $\mathscr{C}$. On sait que :

$$G(f) \circ \alpha_x = \alpha_y \circ F(f).$$

Donc, en composant à droite par β_x :

$$G(f) \circ \alpha_x \circ \beta_x = \alpha_y \circ F(f) \circ \beta_x,$$

soit

$$G(f) \circ \mathrm{id}_{G(x)} = \alpha_y \circ F(f) \circ \beta_x,$$

puis en composant à gauche par β_y :

$$\beta_y \circ G(f) = \beta_y \circ \alpha_y \circ F(f) \circ \beta_x,$$

ce qui donne donc

$$\beta_y \circ G(f) = \mathrm{id}_{F(y)} \circ F(f) \circ \beta_x,$$

d'où le résultat.

5 Connections de Galois

5.1 Définition

Dans le cas où les catégories sont des préordres, les foncteurs sont les fonctions croissantes, définies comme suit :

> **Définition 6** (Fonction croissante)**.** Soient $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ deux préordres. Une **fonction croissante** de A dans B est une fonction $f : A \to B$ telle que
>
> $$\forall x, y \in A,\ x \leq_A y \implies f(x) \leq_B f(y) \tag{1}$$

La définition d'adjonction, présentée dans la partie suivante, se traduit alors ainsi :

> **Définition 7** (Connection de Galois)**.** Pour des préordres $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$, une **connection de Galois** est la donnée de deux fonctions croissantes $f : A \to B$ et $g : B \to A$ telles que pour tous $a \in A, b \in B$:
>
> $$f(a) \leq_B b \iff a \leq_A g(b).$$

Remarque 11. f est un adjoint à gauche et g est un adjoint à droite.

Remarque 12. L'égalité :

$$\{a \in A : f(a) \leq b\} = \{a \in A : a \leq g(b)\}$$

met en évidence la caractérisation de $g(b)$ comme borne supérieure de cet ensemble. Ainsi, dans un ensemble ordonné, lorsqu'il existe, l'adjoint à droite est unique et : $g(b) = \bigvee\{a \in A :\ f(a) \leq_B b\}$ où $\bigvee$ dénote la borne supérieure. De même, $f(a) = \bigwedge\{b \in B :\ a \leq_A g(b)\}$ où $\bigwedge$ symbolise la borne inférieure.

5.2 Premiers exemples

Exercice 22 (Cas où l'inverse d'une fonction croissante bijective est son adjoint)**.** *Montrer que si la fonction croissante $f : A \to B$ a un inverse $g : B \to A$ qui est aussi une fonction croissante, alors g est à la fois un adjoint à droite et un adjoint à gauche de f.*

——— *Corrigé* ———

Comme g est croissante,

$$\forall a \in A, \forall b \in B, f(a) \leq_B b \implies g(f(a)) \leq_A g(b).$$

Or g est l'inverse de f, donc cette dernière inégalité se réécrit : $a \leq_A g(b)$. De même, comme f est croissante et l'inverse de g,

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq_A g(b) \implies f(a) \leq_B b.$$

Ainsi, $f(a) \leq_B b \iff a \leq_A g(b)$. Donc g est un adjoint à droite de f. De manière identique, on démontre que : $\forall a \in A, \forall b \in B, b \leq_B f(a) \iff g(b) \leq_A a$. Donc g est un adjoint à gauche de f.

Remarque 13. L'hypothèse "g croissante" est-elle nécessaire ?
Pour un ordre total sur l'espace de départ, une fonction bijective croissante est toujours d'inverse croissante. Supposons $(A, \leq_A)$ total. Soient $x, y \in B$. Supposons $x \leq_B y$. Montrons que $g(x) \leq_A g(y)$:

- Cas 1 : $x = y$. Alors $g(x) = g(y)$.
- Cas 2 : $x <_B y$. Par l'absurde, supposons la négation de $g(x) \leq_A g(y)$: comme l'ordre est total, cela équivaut à supposer $g(x) >_A g(y)$. Alors $x = f(g(x)) \geq_B f(g(y)) = y$ par monotonie de f, ce qui est absurde.

Si l'ordre n'est pas total, l'hypothèse est nécessaire. Donnons un contre-exemple où $(A, \leq_A)$ n'est pas total. Prenons $f = \mathrm{id} : (\mathbb{N}, \preccurlyeq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ où $\preccurlyeq$ est la relation de divisibilité. f est d'inverse $g = \mathrm{id} : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \preccurlyeq)$, qui n'est pas un adjoint : $2 \leq 3$ mais 2 et 3 ne se divisent pas.

Exercice 23 (Existence d'adjoints quand la fonction n'a pas d'inverse)**.** *On suppose désormais* $\mathbb{N}$ *muni de l'ordre usuel* $\leq$. *Soit* $f : x \in \mathbb{N} \mapsto 2x \in \mathbb{N}$.

1. *Trouver un adjoint à droite pour* f.
2. *Trouver un adjoint à gauche pour* f.

Corrigé

Remarque 14. On constate que f n'a pas d'inverse : un nombre impair n'est pas divisible par 2.

1. Un adjoint à droite $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est défini par :
$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ f(a) \leq b \iff a \leq g(b),$$
c'est-à-dire :
$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ 2a \leq b \iff a \leq g(b).$$
Or :
$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ 2a \leq b \iff a \leq \frac{b}{2}.$$
Mais a étant un entier naturel, ceci implique :
$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ 2a \leq b \iff a \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor.$$
On conclut qu'un adjoint à droite de f est $g : x \in \mathbb{N} \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}$.
2. De façon analogue, un adjoint à gauche est $g : x \in \mathbb{N} \mapsto \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil \in \mathbb{N}$.

Exercice 24 (Sur l'interprétation des entiers naturels comme des nombres réels)**.**
Soit $i \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ *l'injection canonique.*

1. *Montrer que* i *a un adjoint à droite.*
2. *Montrer que* i *a un adjoint à gauche.*

Corrigé

1. On a que i a un adjoint à droite si et seulement s'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R},\ i(a) = a \leq b \iff a \leq g(b).$$

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ convient.

2. On a que i a un adjoint à gauche si et seulement s'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R},\ b \leq i(a) = a \iff g(b) \leq a.$$

La fonction $x \mapsto \lceil x \rceil$ convient.

Exercice 25 (Sur l'interprétation des réels comme des fonctions constantes)**.** *Soit X un ensemble non vide. Soit f : $\begin{array}{ccc} [-\infty, \infty] & \longrightarrow & [-\infty, \infty]^X \\ c & \longmapsto & (x \mapsto c) \end{array}$ où l'ordre sur l'ensemble d'arrivée est $\preccurlyeq$ défini par : $g \preccurlyeq h \iff \forall x \in X, g(x) \leq h(x)$.*

1. Donner un adjoint à gauche de f.

2. Donner un adjoint à droite de f.

Corrigé

1. La fonction $\begin{array}{ccc} [-\infty, \infty]^X & \longrightarrow & [-\infty, \infty] \\ h & \longmapsto & \sup\{h(x); x \in X\} \end{array}$ convient. En effet, soit $h \in [-\infty, \infty]^X$ et soit $c \in [-\infty, \infty]$. Alors : $\sup\{h(x); x \in X\} \leq c \iff h \preccurlyeq f(c) = c$.
2. De façon analogue, la fonction $\begin{array}{ccc} [-\infty, \infty]^X & \longrightarrow & [-\infty, \infty] \\ h & \longmapsto & \inf\{h(x); x \in X\} \end{array}$ convient.

5.3 Ensembles et partitions

Définition 8 (Image directe, Tiré en arrière, Poussé en avant)**.** Soient X, Y des ensembles et $f : X \to Y$. Pour tout $A \subset X, B \subset Y$, on définit :
L'**image directe** :

$$f_!(A) = \{y \in Y : \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Le **tiré en arrière** ou **image réciproque** :

$$f^*(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Le **poussé en avant** :

$$f_*(A) = \{y \in Y : \forall x \in X, y = f(x) \implies x \in A\}.$$

Exercice 26 (Sur les adjoints de l'image directe)**.** *Soient X, Y des ensembles. On note $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On le muni de l'inclusion. Soit $f : X \to Y$.*

1. Montrer que l'image directe $f_! : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ est une fonction croissante.

2. *Montrer que $f_!$ a un adjoint à droite.*
3. *Donner une condition suffisante pour laquelle $f_!$ a un adjoint à gauche.*

Corrigé

1. Soient $A, B \in \mathscr{P}(X)$ tels que $A \subset B$. Montrons que $f_!(A) \subset f_!(B)$.
   Soit $y \in f_!(A)$. Alors : $\exists x \in A \mid f(x) = y$. Soit un tel x.
   Or : $x \in A$. Donc $x \in B$.
   Donc : $y \in f_!(B)$.
2. Montrons que l'image réciproque, $f^* : A \in \mathscr{P}(Y) \mapsto \{x \in X \mid f(x) \in A\} \in \mathscr{P}(X)$, est un adjoint à droite de f, c'est-à-dire pour $A \subset X, B \subset Y$, on a : $f_!(A) \subset B \iff A \subset f^*(B)$.
   Supposons d'abord que : $f_!(A) \subset B$. Montrons que : $A \subset f^*(B)$.
   Soit $x \in A$. Alors : $f(x) \in B$, par hypothèse.
   Réciproquement, supposons que : $A \subset f^*(B)$. Montrons que : $f_!(A) \subset B$.
   Soit $y \in f_!(A)$. Alors : $\exists x \in A \mid f(x) = y$. Soit un tel x. Par hypothèse : $\forall x \in A, f(x) \in B$. Donc $y \in B$.
3. Supposons f bijective. Montrons que $f^* : A \in \mathscr{P}(Y) \mapsto \{x \in X \mid f(x) \in A\} \in \mathscr{P}(X)$ est un adjoint à gauche, c'est-à-dire pour $A \subset X,\ B \subset Y$, on a : $B \subset f_!(A) \iff f^*(B) \subset A$.
   Supposons d'abord que : $B \subset f_!(A)$. Montrons que : $f^*(B) \subset A$.
   Soit $x \in f^*(B)$. Alors $f(x) \in B$. Par hypothèse : $f(x) \in B \implies \exists x' \in A \mid f(x) = f(x')$. Soit un tel x'. Par injectivité de f, $x' = x$ et donc $x \in A$.
   Réciproquement, supposons que : $f^*(B) \subset A$. Montrons que : $B \subset f_!(A)$.
   Soit $y \in B$. Par surjectivité de f : $\exists x \in X \mid y = f(x)$. Soit un tel x. Alors $f(x) \in B$, donc par hypothèse : $x \in A$, soit : $y \in f_!(A)$.

Point de compréhension

Quand f est bijective, l'application "image directe" est à son tour une application croissante bijective de $\mathscr{P}(X)$ vers $\mathscr{P}(Y)$, de réciproque croissante. Cela explique pourquoi, sous cette condition, on a un adjoint aussi bien d'un côté que de l'autre et qui est le même des deux côtés.

Exercice 27 (Relation entre le poussé en avant d'une partie et le tiré en arrière d'une partie)**.** *Montrer que $f_* : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ est un adjoint à droite de $f^* : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$.*

Corrigé

Soient $A \in \mathscr{P}(X), B \in \mathscr{P}(Y)$. Montrons que :

$$f^*(B) \subset A \iff B \subset f_*(A).$$

Supposons $f^*(B) \subset A$. Soit $y \in B$. Si $x \in X$ est tel que $y = f(x)$, alors $x \in A$ par hypothèse, donc $y \in f_*(A)$.
Supposons $B \subset f_*(A)$. Soit $x \in f^*(B)$. Alors $f(x) \in B \subset f_*(A)$, donc $x \in A$.

Exercice 28 (Comprendre la différence entre l'image directe et le poussé en avant). *Soient X l'ensemble des états possibles d'une chambre et Y l'ensemble des états possibles du thermomètre dans cette chambre. Soit $f : X \to Y$ qui à un état de la chambre associe un relevé du thermomètre.*

1. *Quel est $f_!(\{$il y a un chat dans la chambre$\})$?*
2. *Quel est $f_*(\{$il y a un chat dans la chambre$\})$?*

Corrigé

1. Il s'agit de : $\{$températures de la chambre pour lesquelles il est possible qu'il y ait un chat$\}$.
2. Il s'agit de : $\{$températures de la chambre pour lesquelles il y a forcément un chat$\}$.

Définition 9 (Relation d'ordre sur les partitions d'un ensemble). Soient X un ensemble et $\mathscr{E}(X)$ l'ensemble des partitions de X. Pour toute partition P, on note $\sim_P$ la relation d'équivalence associée, pour laquelle deux éléments sont équivalents si et seulement si ils sont dans la même partie de la partition.
On dit que $P \in \mathscr{E}(X)$ est plus **fine** que $Q \in \mathscr{E}(X)$, et on note $P \leq Q$, si :

$$\forall x, y \in X, x \sim_P y \implies x \sim_Q y.$$

Remarque 15. La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{E}(X)$.

Exercice 29 (Caractérisation de la relation d'ordre sur les partitions). *Montrer que : pour deux partitions P, Q d'un ensemble X, P est plus fine que Q si et seulement si tout élément de P est inclus dans un élément de Q.*

Corrigé

Soit $S \in P$. Comme S est non vide, on peut se donner $x \in S$. Soit T l'élément de Q contenant x. Montrons que : $S \subset T$. Soit $y \in S$. Alors $x \sim_P y$, donc $x \sim_Q y$, ce qui entraîne $y \in T$.

Définition 10 (Join, meet). Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné. Soient $a, b \in A$.

1. Le **join** de a et b, s'il existe, est le plus petit élément $c \in A$ tel que $a \leq c$ et $b \leq c$. On le note $a \wedge b$.
2. Le **meet** de a et b, s'il existe, est le plus grand élément $c \in A$ tel que $c \leq a$ et $c \leq b$. On le note $a \vee b$.

Remarque 16. $a \wedge b = \inf(a, b)$, $a \vee b = \sup(a, b)$.

Exercice 30 (Relations d'équivalence, meet et join de partitions). *Soit X un ensemble. Pour P, Q deux partitions sur X, on définit, pour $x, y \in X$:*

$$x \approx y \iff x \sim_P y \text{ et } x \sim_Q y.$$

$$x \frown y \iff x \sim_P y \text{ ou } x \sim_Q y.$$

1. *Montrer que $\approx$ définit une relation d'équivalence.*
2. *Montrer que la partition associée à $\approx$ est $P \wedge Q$.*
3. *Montrer que $\frown$ n'est pas toujours une relation d'équivalence.*
4. *Soit $\simeq$ la fermeture transitive de $\frown$, définie par : pour $x, y \in X$,*

$$x \simeq y \iff \exists(z_1, ..., z_n) \in X^n \mid x \frown z_1 \text{ et } z_1 \frown z_2 \text{ et ... et } z_{n-1} \frown z_n \text{ et } z_n \frown y.$$

Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence.

5. *Montrer que la partition associée à $\simeq$ est $P \vee Q$.*

Corrigé

1. Comme le "et" logique préserve la transitivité, la réflexivité, la transitivité et la symétrie sont vérifiées car $\sim_P$ et $\sim_Q$ sont des relations d'équivalence.
2. Soit $P_\approx$ la relation d'équivalence associée à $\approx$. Montrons que :
   — $P_\approx \leq P$ et $P_\approx \leq Q$,
   — pour $R \in \mathscr{E}(X)$, $R \leq P$ et $R \leq Q \implies R \leq P_\approx$.

   Pour $x, y \in X$:
   — $x \approx y$ signifie que $x \sim_P y$ et $x \sim_Q y$, qui impliquent respectivement $P_\approx \leq P$ et $P_\approx \leq Q$;
   — si $R \leq P$ et $R \leq Q$ alors $x \sim_R y$ implique $x \sim_P y$ et $x \sim_Q y$, ce qui donne par définition $x \approx y$.
3. Prenons $X = \{a, b, c\}, P = \{a, b, c\}, Q = \{a, b, c\}$. Alors : $b \sim_Q a$ et $b \sim_P c$ impliquent $b \frown a$ et $b \frown c$ mais on n'a pas $a \frown c$ donc la transitivité n'est pas vérifiée.
4. La réflexivité et la symétrie sont vérifiées car $\sim_P$ et $\sim_Q$ les vérifient. Montrons la transitivité : soient $x, y, z \in X$ tels que $x \simeq y$ et $y \simeq z$. Alors :

$$\exists(z_1, ..., z_n) \in X^n \mid x \frown z_1 \text{ et } z_1 \frown z_2 \text{ et ... et } z_{n-1} \frown z_n \text{ et } z_n \frown y$$

   et

$$\exists(x_1, ..., x_m) \in X^m \mid y \frown x_1 \text{ et } x_1 \frown x_2 \text{ et ... et } x_{m-1} \frown x_m \text{ et } x_m \frown z.$$

   Ce qui donne : $x \frown z_1$ et $z_1 \frown z_2$ et ... et $z_{n-1} \frown z_n$ et $z_n \frown y$ et $y \frown x_1$ et $x_1 \frown x_2$ et ... et $x_{m-1} \frown x_m$ et $x_m \frown z$. D'où : $x \simeq z$.
5. Soit $P_\simeq$ la relation d'équivalence associée à $\simeq$. Montrons que :
   — $P \leq P_\simeq$ et $Q \leq P_\simeq$;
   — pour $R \in \mathscr{E}(X)$, si $P \leq R$ et $Q \leq R \implies P_\simeq \leq R$.

   Pour $x, y \in X$:
   — si $x \sim_P y$, alors $x \frown y$ donc $x \simeq y$. Si $x \sim_Q y$, alors $x \frown y$ donc $x \simeq y$;
   — soit $R \in \mathscr{E}(X)$. Supposons que : $x \sim_P y \implies x \sim_R y$ et $x \sim_Q y \implies x \sim_R y$. Si $x \simeq y$ alors : $\exists(z_1, ..., z_n) \in X^n \mid x \frown z_1$ et $z_1 \frown z_2$ et ... et $z_{n-1} \frown z_n$ et $z_n \frown y$. Cela implique : $\exists(z_1, ..., z_n) \in X^n \mid x \sim_R z_1$ et $z_1 \sim_R z_2$ et ... et $z_{n-1} \sim_R z_n$ et $z_n \sim_R y$. Par transitivité, $x \sim_R y$.

Exercice 31 (Partitions et tirés en arrière)**.** *Soient X un ensemble et $P \in \mathscr{P}(X)$. Est-il toujours possible de construire un ensemble Y, une partition Q sur Y et une fonction $f : X \to Y$ tels que P soit obtenue en tirant en arrière Q par f ?*

Corrigé

Une solution triviale est : $Y = X, f : x \mapsto x, \sim_Q = \sim_P$.
Une autre solution est : $Y = \{\text{classes d'équivalence de } \sim_P\}$, $f : x \mapsto$ classe de x, $\sim_Q$ étant l'égalité.

Remarque 17 (Poussé en avant d'une partition)*.* Soient X, Y des ensembles. Pour $f : X \to Y$ et $P \in \mathscr{E}(X)$, il existe une manière de pousser en avant P de façon à obtenir une partition de Y. Posons la relation binaire $\mathscr{R}$: pour $y_1, y_2 \in Y$,

$$y_1 \mathscr{R} y_2 \iff \exists\, x_1, x_2 \in X \mid x_1 \sim_P x_2 \text{ et } f(x_1) = y_1 \text{ et } f(x_2) = y_2$$

La partition recherchée est la partition associée à la clôture réflexive-transitive de $\mathscr{R}$.

Exercice 32 (Absence d'adjoint à droite et existence d'un adjoint à gauche)**.** *Soit E un espace vectoriel. Soit $i : \begin{array}{ccc} \mathrm{Sev}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ V & \longmapsto & V \end{array}$.*

1. *Donner un adjoint à gauche de i.*
2. *Montrer que i n'a pas d'adjoint à droite.*

Corrigé

1. Soit $j : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathrm{Sev}(E) \\ A & \longmapsto & \mathrm{Vect}(A) \end{array}$. Alors : $\forall A \in \mathscr{P}(E), \forall V \in \mathrm{Sev}(E)$, on a : $\mathrm{Vect}(A) \subset V \iff A \subset V$, donc j est un adjoint à gauche de i.

   Point de compréhension
   Nous avons une forumle explicite pour l'adjoint à gauche. On l'applique avec en tête que, ici, $\bigwedge = \bigcap$.

   Une autre façon de le voir est de remarquer que : pour $A \in \mathscr{P}(E)$, $\bigwedge\{V \in \mathrm{Sev}(E) : A \subset V\} = \bigcap\{V \in \mathrm{Sev}(E) :\ A \subset V\} = \mathrm{Vect}(A) \in \mathrm{Sev}(E)$.

2. $\bigvee\{V \in \mathrm{Sev}(E) :\ V \subset A\} = \mathrm{Vect}(\bigcup\{V \in \mathrm{Sev}(E) :\ V \subset A\})$

   Point de compréhension
   Nous avons une formule explicite pour l'adjoint à droite. Si elle ne vérifie par la définition 7, alors il n'y a pas d'ajoint à droite. Ici, $\bigvee = \mathrm{Vect} \bigcup$.

   Soit $j : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathrm{Sev}(E) \\ A & \longmapsto & \mathrm{Vect}(\bigcup\{V \in \mathrm{Sev}(E) :\ V \subset A\}) \end{array}$.
   Contre-exemple : pour $A = \mathbb{R}(0,1) \cup \mathbb{R}(1,0)$ et $V = \mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{R}^2 \subset j(A)$ mais $\mathbb{R}^2$ n'est pas inclus dans A.
   Conclusion : i n'a pas d'ajoint à droite.

Théorème 1. *Soient A et B des ensembles ordonnés. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ des fonctions croissantes. Supposons que f est un adjoint à gauche de g (ou de façon équivalente, que g est un adjoint à droite de f).*

- *Pour $a, a' \in A$, si $a \vee a'$ et $f(a) \vee f(a')$ existent, alors : $f(a \vee a') = f(a) \vee f(a')$.*
- *Pour $b, b' \in B$, si $b \wedge b'$ et $g(b) \wedge g(b')$ existent, alors : $g(b \wedge b') = g(b) \wedge g(b')$.*

Point de compréhension

Les adjoints à gauche préservent les joins et les adjoints à droite préservent les meets.

Démonstration. Soient $a, a' \in A$. Supposons que $a \vee a'$ existe. Par définition du join, $a \leq a \vee a'$ et $a' \leq a \vee a'$. Comme f est croissante, on a $f(a) \leq f(a \vee a')$ et $f(a') \leq f(a \vee a')$. Donc $f(a \vee a')$ est un majorant de $f(a)$ et $f(a')$.
Soit $b \in B$ un autre majorant de $f(a)$ et $f(a')$. Alors $f(a) \leq b$ et $f(a') \leq b$. Comme g est l'adjoint à droite de f, on a $a \leq g(b)$ et $a' \leq g(b)$. Donc $g(b)$ est un majorant de a et a'. Par définition du join, on a donc : $a \vee a' \leq g(b)$. Comme f est l'adjoint à gauche de g, on a : $f(a \vee a') \leq b$. Cela démontre que $f(a) \vee f(a')$ existe et que $f(a \vee a') = f(a) \vee f(a')$.
La démonstration du second point est analogue. □

Théorème 2. *Soient A et B des ensembles ordonnés. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ des fonctions croissantes.*

- *Si $f : A \to B$ est un adjoint à gauche, alors il préserve les joins quand ils existent : pour tout $S \subset A$, si S a un join, alors $f(\bigvee S) = \bigvee\{f(a) : a \in S\}$.*
- *Si $g : B \to A$ est un adjoint à droite, alors il préserve les meets quand ils existent : pour tout $S \subset B$, si S a un meet, alors $g(\bigwedge S) = \bigwedge\{g(b) : b \in S\}$.*

Démonstration. Soit $S \subset A$. Supposons que S a un join $j = \bigvee S$. Alors pour tout $a \in S$, $a \leq j$ donc $f(a) \leq f(j)$ par croissance de f. Donc $f(j)$ est un majorant de $\{f(a) : a \in S\}$. Soit $b \in B$ un majorant de cet ensemble. Alors : $\forall a \in S, f(a) \leq b$. Or g est un adjoint à droite de f donc : $\forall a \in S, a \leq g(b)$. Donc $g(b)$ est un majorant de S. Par définition de j, on a donc : $j \leq g(b)$. Or f est un adjoint à gauche de g, donc $f(j) \leq b$. Donc $f(j) = f(\bigvee S) = \bigvee\{f(a) : a \in S\}$.
La démonstration du second point est analogue. □

Exercice 33 (Absence d'adjoint à gauche et existence d'un adjoint à droite)**.**
Soit $i : \begin{array}{ccc} \mathrm{Ouv}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \\ U & \longmapsto & U \end{array}$.

1. *Donner un adjoint à droite de i.*
2. *Montrer que i n'a pas d'adjoint à gauche.*

Corrigé

1. Soit $j : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathrm{Ouv}(\mathbb{R}^d) \\ A & \longmapsto & \mathrm{Int}(A) \end{array}$ où $\mathrm{Int}(A)$ désigne l'intérieur de A.
   Alors pour $U \in \mathrm{Ouv}(\mathbb{R}^d)$ et $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$, $U \subset \mathrm{Int}(A) \iff U \subset A$, ce qui montre que j est un adjoint à droite de i.
2. Soit $(U_x)_x$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^d$. $\bigwedge\{U_x : x\}) = \mathrm{Int}(\bigcap\{U_x : x\})$.
   L'ensemble $i(\bigwedge\{U_x : x\}) = \mathrm{Int}(\bigcap\{U_x : x\})$ n'est en général pas égal à $\bigwedge\{i(U_x) : x \in X\} = \bigcap\{U_x : x \in X\}$ du fait qu'une intersection quelconque d'ouverts n'est en général pas un ouvert. On peut s'en convaincre à l'aide de l'exemple suivant : $d = 1$, $\bigcap\{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[: n > 0\} = \{0\}$.

Point de compréhension

Par le théorème 2, si i ne préserve pas les meets, alors i ne peut pas être un adjoint à droite, donc i n'admet pas d'adjoint à gauche.

5.4 Une application aux probabilités

Soit X une variable aléatoire réelle et $F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}$ sa fonction de répartition.

Proposition 1.

1. *La fonction F_X est continue à droite ;*
2. *on a : $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$;*
3. *on a : $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$;*
4. *la fonction F_X est croissante.*

Théorème 3. *Si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ vérifie $1, 2, 3, 4$ alors il existe une variable aléatoire réelle X telle que $F_X = F$.*

Démonstration.
Cas où F induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers]0,1[: on pose $U \sim \mathrm{Unif}(]0,1[)$ et $X = F^{-1}(U)$. Alors :

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leq t) \\ &= \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(U \leq F(t)) \\ &= F(t), \end{aligned}$$

où la dernière égalité a été obtenue car $F(t) \in [0,1]$ et $U \sim \mathrm{Unif}(]0,1[)$.
Cas général : la seule propriété de l'inverse de F qu'on a utilisée a été : $F^{-1}(U) \leq t \iff U \leq F(t)$: au lieu d'une bijection réciproque, il suffit d'avoir un adjoint à gauche de F. On pourrait vérifier que $\inf\{t : U \leq F(t)\}$ convient. La vérification utilise les points 1, 2, 3 et 4 du théorème 3. $\square$

6 Adjonction

Nous allons généraliser les connections de Galois entre préordres pour obtenir les foncteurs adjoints entre catégories. Pour des foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, on a des foncteurs $\mathscr{D}(L(\,\cdot\,), \_) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \mathrm{Set}$ et $\mathscr{C}(\,\cdot\,, R(\_)) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D} \to \mathrm{Set}$ qui, pour tout $(c, d) \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{D}$, donnent respectivement les ensembles $\mathscr{D}(F(c), d)$ et $\mathscr{C}(c, G(d))$.

6.1 Définition

Définition 11 (Adjonction)**.** Pour $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des catégories, une **adjonction** est la donnée d'une paire de foncteurs $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ et $R : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ et d'un isomorphisme naturel $\alpha : \mathscr{D}(L(\,\cdot\,), \_) \Rightarrow \mathscr{C}(\,\cdot\,, R(\_))$. On dit que L est un **adjoint à gauche** de R et que R est un **adjoint à droite** de L.

Point de compréhension

En d'autres termes : pour tout a dans $\mathscr{C}$, pour tout b dans $\mathscr{D}$, il y a une correspondance bijective entre :

- les morphismes de $L(a)$ dans b ;
- les morphismes de a dans $R(b)$,

c'est-à-dire : $\forall a \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \forall b \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}), \mathscr{D}(L(a), b) \cong \mathscr{C}(a, R(b))$.

6.2 Exercices

Exercice 34 (Condition nécessaire d'adjonction)**.** *Soit* $\mathbf{1}$ *la catégorie libre sur le graphe* $G = (\{*\}, \varnothing)$*, c'est-à-dire le graphe avec un sommet et aucune arête. Soit* $F : \mathrm{Set} \to \mathbf{1}$ *qui envoie tout ensemble sur* $*$ *et toute fonction entre ensembles sur le morphisme* id_**.*

1. *Donner une condition nécessaire sur les adjoints à droite de* F*.*
2. *Donner une condition nécessaire sur les adjoints à gauche de* F*.*

Corrigé

1. On cherche $R : \mathbf{1} \to \mathrm{Set}$ tel que : pour tout ensemble S, $\mathbf{1}(F(S), *) \cong \mathrm{Set}(S, R(*))$. Or : pour tout ensemble S, $F(S) = *$, donc $\mathbf{1}(F(S), *) = \{\mathrm{id}_*\}$. Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathrm{Set}(S, R(*))) = 1$. En d'autres termes, pour tout ensemble S, il existe une unique fonction de S dans $R(*)$. Donc $R(*)$ est un singleton.
2. On cherche $L : \mathbf{1} \to \mathrm{Set}$ tel que : pour tout ensemble S, $\mathrm{Set}(L(*), S) \cong \mathbf{1}(*, F(S))$. Or : pour tout ensemble S, $F(S) = *$, donc $\mathbf{1}(*, F(S)) = \{\mathrm{id}_*\}$. Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathrm{Set}(L(*), S)) = 1$. En d'autres termes, pour tout ensemble S, il existe une unique fonction de $L(*)$ dans S. Donc $L(*) = \varnothing$.

Exercice 35 (Candidats pour l'adjonction)**.** *Soit* Set^2 *la catégorie dans laquelle les objets sont les paires d'ensembles, les morphismes les paires de fonctions, telles que : pour* $(S_1, T_1), (S_2, T_2)$, $(f, g) : (S_1, T_1) \to (S_2, T_2)$ *où* $f : S_1 \to S_2$ *et* $g : T_1 \to T_2$*. La composition est définie composante par composante : pour* $(S_1, T_1), (S_2, T_2), (S_3, T_3)$ *des paires d'ensembles,* $(f_1, g_1) : (S_1, T_1) \to (S_2, T_2)$ *et* $(f_2, g_2) : (S_2, T_2) \to (S_3, T_3)$ *des paires de fonctions,* $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$*. Soit* $F : \mathrm{Set}^2 \to \mathrm{Set}$ *le foncteur projection sur la première composante : pour* (S, T) *une paire d'ensembles,* $F(S, T) = S$ *et pour* (f, g) *une paire de fonctions,* $F(f, g) = f$*.*

1. *Déterminer un candidat pour un adjoint à droite.*
2. *Déterminer un candidat pour un adjoint à gauche.*

Soit $\times : \mathrm{Set}^2 \to \mathrm{Set}$ *le foncteur produit cartésien : pour* (S, T) *une paire d'ensembles,* $\times(S, T) = S \times T$ *et pour* (f, g) *une paire de fonctions,* $\times(f, g) = (f, g)$*.*

3. *Montrer qu'il ne peut pas y avoir d'adjoint à droite.*
4. *Déterminer un candidat pour un adjoint à gauche.*

Soit $+ : \mathrm{Set}^2 \to \mathrm{Set}$ *le foncteur union disjointe : pour* (S, T) *une paire d'ensembles, on définit* $+(S, T) = S + T$ *par :* $S \times \{0\} \cup T \times \{1\}$ *et pour* $f : S_1 \to S_2$ *et* $g : T_1 \to T_2$*, on définit* $+(f, g) : S_1 + T_1 \to S_2 + T_2$ *par :* $\forall x \in S_1, +(f, g)(x) = f(x)$ *;* $\forall x \in T_1, +(f, g)(x) = g(x)$*.*

5. *Déterminer un candidat pour un adjoint à droite.*
6. *Montrer qu'il ne peut pas y avoir d'adjoint à gauche.*

Corrigé

1. On cherche $R : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}^2$ tel que : pour tous ensembles S, T, U,
$$\mathrm{Set}(F(T, U), S) \cong \mathrm{Set}^2((T, U), R(S)).$$
Notons $R(S) = (A, B)$. Comme $F(T, U) = T$, l'expression devient :
$$\mathrm{Set}(T, S) \cong \mathrm{Set}^2((T, U), (A, B)).$$
Notons a, b, s, t, u les cardinaux respectifs de A, B, S, T, U. S'ils sont finis, alors l'expression ci-dessus implique l'égalité suivante :
$$s^t = a^t b^u,$$
qui est vraie en particulier pour $s = a$ et $b = 1$ ((qui est la seule solution valable pour tous u, t)). Cela permet de conjecturer qu'un candidat pour l'adjoint à droite de F est $R : \left| \begin{array}{ccc} S & \longmapsto & (S, \{*\}) \\ f & \longmapsto & (f, \mathrm{id}_*) \end{array} \right.$, où la seconde composante est un singleton quelconque.
2. On cherche $L : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}^2$ tel que : pour tous ensembles S, T, U,
$$\mathrm{Set}(L(S), (T, U)) \cong \mathrm{Set}^2(S, F(T, U)).$$
Notons $L(S) = (A, B)$. Comme $F(T, U) = T$, l'expression devient :
$$\mathrm{Set}((A, B), (T, U)) \cong \mathrm{Set}^2(S, T).$$

Notons a, b, s, t, u les cardinaux respectifs de A, B, S, T, U. S'ils sont finis, alors l'expression ci-dessus implique l'égalité suivante :

$$t^a u^b = t^s,$$

qui est vraie en particulier pour $s = a$ et $b = 0$ (qui est la seule solution valable pour tous u, t). Cela permet de conjecturer qu'un candidat pour l'adjoint à gauche de F est $L : \left| \begin{array}{ccc} S & \longmapsto & (S, \varnothing) \\ f & \longmapsto & (f, \mathrm{id}_\varnothing) \end{array} \right.$.

3. Soit $R : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}^2$ un adjoint à droite. Cherchons une absurdité. Soient trois ensembles S, T, U. Alors :
$$\mathrm{Set}(\times(T, U), S) \cong \mathrm{Set}^2((T, U), R(S)).$$
Notons $R(S) = (A, B)$. Comme $\times(T, U) = T \times U$, l'expression devient :
$$\mathrm{Set}(T \times U, S) \cong \mathrm{Set}^2((T, U), (A, B)).$$
Notons a, b, s, t, u les cardinaux respectifs de A, B, S, T, U. S'ils sont finis, alors l'expression ci-dessus implique l'égalité suivante :
$$s^{tu} = a^t b^u,$$
qui n'est pas vraie en général quel que soit le choix de A, B. En effet, si $s = 2$, alors a et b sont des puissances de 2 : soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $a = 2^n, b = 2^m$. Alors l'égalité devient :
$$2^{tu} = 2^{nt} 2^{mu} = 2^{nt+mu}.$$
Il faudrait donc trouver n et m tels que l'égalité $tu = nt + mu$ soit vérifiée pour tous $s, t \in \mathbb{N}$. Par exemple, pour $t = 2$ et $s = 1$, on obtient $2 = 2n + m$. Les seules solutions possibles dans $\mathbb{N}^2$ sont $(1, 0)$ et $(2, 0)$. Mais aucun de ces couples n'est solution si $t = 1$ et $s = 3$. Donc l'égalité est impossible, ce qui entraîne qu'il n'y a pas d'adjoint à droite.
4. On cherche $L : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}^2$ tel que : pour tous ensembles S, T, U,
$$\mathrm{Set}(L(S), (T, U)) \cong \mathrm{Set}^2(S, \times(T, U)).$$
Notons $L(S) = (A, B)$. Comme $\times(T, U) = T \times U$, l'expression devient :
$$\mathrm{Set}((A, B), (T, U)) \cong \mathrm{Set}^2(S, T \times U).$$
Notons a, b, s, t, u les cardinaux respectifs de A, B, S, T, U. S'ils sont finis, alors l'expression ci-dessus implique l'égalité suivante :
$$t^a u^b = (tu)^s,$$
qui est vraie en particulier pour $a = b = s$ (qui est la seule solution valable pour tous u, t). Cela permet de conjecturer qu'un candidat pour l'adjoint à gauche de $\times$ est $L : \left| \begin{array}{ccc} S & \longmapsto & (S, S) \\ f & \longmapsto & (f, f) \end{array} \right.$. Ce foncteur est appelé duplication ou diagonale.

5. On cherche $R : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}^2$ tel que : pour tous ensembles S, T, U,
$$\mathrm{Set}(+(T, U), S) \cong \mathrm{Set}^2((T, U), R(S)).$$
Notons $R(S) = (A, B)$. Comme $+(T, U) = T + U$, l'expression devient :
$$\mathrm{Set}(T + U, S) \cong \mathrm{Set}^2((T, U), (A, B)).$$
Notons a, b, s, t, u les cardinaux respectifs de A, B, S, T, U. S'ils sont finis, alors l'expression ci-dessus implique l'égalité suivante :
$$s^{t+u} = a^t b^u,$$
qui est vraie en particulier pour $a = b = s$ (qui est la seule solution valable pour tous u, t). Cela permet de conjecturer qu'un candidat pour l'adjoint à droite de $+$ est $R : \left| \begin{array}{ccc} S & \longmapsto & (S, S) \\ f & \longmapsto & (f, f) \end{array} \right.$, c'est-à-dire encore la diagonale.

6. On cherche $L : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}^2$ tel que : pour tous ensembles S, T, U,
$$\mathrm{Set}(L(S), (T, U)) \cong \mathrm{Set}^2(S, +(T, U)).$$
Notons $L(S) = (A, B)$. Comme $+(T, U) = T + U$, l'expression devient :
$$\mathrm{Set}((A, B), (T, U)) \cong \mathrm{Set}^2(S, T + U).$$
Notons a, b, s, t, u les cardinaux respectifs de A, B, S, T, U. S'ils sont finis, alors l'expression ci-dessus implique l'égalité suivante :
$$t^a u^b = (t + u)^s,$$
qui n'est pas vraie en général quel que soit le choix de A, B. En effet, si $t = 2$ et $u = 3$, alors on a l'égalité $2^a 3^b = 5^s$ qui ne peut pas être vraie dès que $s \neq 0$.

Remarque 18. La notion d'adjoint appliquée à la duplication nous permet de redécouvrir des opérations utiles : le produit cartésien et l'union disjointe.

Exercice 36 (Adjoint d'un foncteur d'oubli)**.** *Soit* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$ *la catégorie des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$. *Soit le foncteur d'oubli* $F : \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Set}$, *qui à un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel associe l'ensemble de ses éléments, et qui envoie un morphisme sur lui-même. Deviner un adjoint à gauche de* F.

Corrigé

Soit X un ensemble. Soit $\mathbb{R}^{(X)} = \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, \mathrm{supp}(f) \text{ est fini }\}$. Noter que $\mathbb{R}^{(X)}$ est bien un espace vectoriel : la fonction nulle est à support fini et cet espace est bien stable par combinaison linéaire. Une base de $\mathbb{R}^{(X)}$ est $\{\mathbb{1}_{\{x\}} : x \in X\}$. En effet, cette famille est génératrice : $\forall f \in \mathbb{R}^{(X)}, f = \sum\limits_{x \in \mathrm{supp}(f)} f(x)\mathbb{1}_{\{x\}}$; cette famille est libre : pour tout n, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ n-uplet d'éléments distincts de X, soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ des réels tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{\{x_i\}} = 0$. Alors : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{\{x_i\}}(x_k) = 0$. Mais $\mathbb{1}_{\{x_i\}}(x_k) = \delta_{i,k}$, donc l'égalité devient : $\lambda_k = 0$ et ce quelque soit k entier compris entre 1 et n. Un adjoint à gauche de F est G défini par : pour X un ensemble, $G(X) = \mathbb{R}^{(X)}$ et pour $f : X \to Y$ une fonction, $G(f) = \Big(g \in \mathbb{R}^{(X)} \mapsto \big(y \mapsto \sum\limits_{x \in f^{-1}(\{y\})} g(x)\big)\Big)$.

Point de compréhension

On cherche α un isomorphisme naturel tel que : pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, pour tout ensemble X, $\alpha_{V,X} : \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(G(X), V) \to \mathrm{Set}(X, F(V))$.

Pour V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et X un ensemble, on pose $\alpha_{V,X} : \big(\varphi : \mathbb{R}^{(X)} \to V\big) \mapsto \big(x \in X \mapsto \varphi(\mathbb{1}_{\{x\}})\big)$. Il se trouve que cela convient.

Remarque 19. Si g est pensé comme un profil de masse sur X, $G(f)(g)$ est le transport cette masse par f.

Références

[1] John Baez. « Applied Category Theory Course ». Cours en ligne. URL : https://math.ucr.edu/home/baez/act%5C_course/.

[2] Brendan Fong et David Spivak. *Seven Sketches in Compositionality : An Invitation to Applied Category Theory*. Cambridge University Press, 2019.

[3] Alain Prouté. « La théorie des ensembles selon les Shadoks ». Séminaire général de Logique de l'université Paris Diderot. 2008.